**Problem 15)**

a) $$J_n(-x) = (-x/2)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (-x/2)^{2k}}{k!(n+k)!} = (-1)^n (x/2)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k}}{k!(n+k)!} = (-1)^n J_n(x).$$

b) $$Y_n(-x) = \frac{2}{\pi}[c + \ln(-x/2)]\, J_n(-x) - \frac{(-x/2)^{-n}}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!}(-x/2)^{2k}$$

$$- \frac{(-x/2)^n}{\pi(n!)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{(-x/2)^n}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (-x/2)^{2k}}{k!(k+n)!} \left[ \sum_{m=1}^{n+k} \frac{1}{m} + \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m} \right]$$

$$= \frac{2}{\pi}[c + \ln(x/2) + \mathrm{i}\pi]\,(-1)^n J_n(x) - \frac{(-1)^{-n}(x/2)^{-n}}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!}(x/2)^{2k}$$

$$- \frac{(-1)^n (x/2)^n}{\pi(n!)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{(-1)^n (x/2)^n}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k}}{k!(k+n)!} \left[ \sum_{m=1}^{n+k} \frac{1}{m} + \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m} \right]$$

$$= (-1)^n [Y_n(x) + 2\mathrm{i}\, J_n(x)].$$